به نام خداوند بخشنده مهربان

# جبر خطی


دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی


پاییز ۱۴۰۲

رنک، وارون و دترمینان | **تمرین سوم** | تاریخ انتشار: ۲۷ آبان ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. **همچنین هر تمرین تئوری و عملی را می‌توانید تا حداکثر ۳ روز با تاخیر تحویل دهید.** این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

## سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۷ آذر ۱۴۰۲

**پرسش ۱** (۱۰ نمره)

(آ) فرض کنید ماتریس $A$ یک ماتریس nilpotent باشد. نشان دهید که $A+I$ وارون پذیر است.

(ب) شرایط معکوس‌پذیری و معکوس ماتریس $I+uv^T$ را بدست آورید که در آن $I \in R^{n\times n}$ ماتریس همانی بوده و $u,v \in R^n$ باشند.

(ج) به ازای هر ماتریس معکوس‌پذیر $A \in R^{n\times n}$ و هر دو بردار $u,v \in R^n$ نشان دهید:

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

**پرسش ۲** (۱۰ نمره) اثبات کنید که دترمینان ماتریس های زیر برابر ۰ است:

(آ) برای $n \geq 3$:

$$A_{n\times n} : a_{i,j} = i+j$$

(ب) برای $n \geq 4$:

$$B_{n\times n} : b_{i,j} = (i+j)^2$$

**پرسش ۳** (۱۰ نمره) فرض کنید که بردارهای $v_1, v_2, ..., v_m$ مستقل خطی باشند. ثابت کنید اگر $n$ بردار مستقل خطی دیگر مانند $u_1, u_2, ...., u_n$ داشته باشیم و یک زیرمجموعه $m$ عضوی دلخواه از این $n$ بردار مانند $w_1, w_2, ..., w_m$ در نظر بگیریم آنگاه:

$$dim(span\{v_1+w_1, v_2+w_2, ..., v_m+w_m\}) \geq m-n.$$

**پرسش ۴** (۱۰ نمره) ثابت کنید برای هر ماتریس مربعی A، رنک ماتریس برابر r است اگر و تنها اگر r بزرگترین عددی باشد به طوری که یک sub matrix با ابعاد $r\times r$ با دترمینان مخالف صفر وجود داشته باشد.

**پرسش ۵** (۱۰ نمره) فرض کنید به ازای دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$، ماتریس $I_{m\times m}+AB$ وارون پذیر است.نشان دهید ماتریس $I_{n\times n}+BA$ وارون پذیر است.

**پرسش ۶** (۲۰ نمره)

(آ) تبدیل خطی T بر فضای برداری V را در نظر بگیرید به طوری که range(T) و null(T) هر دو دارای بعد متناهی هستند. نشان دهید V نیز دارای بعد متناهی است.

(ب) فضای برداری متناهی V و تبدیل خطی T از فضای V به W را در نظر بگیرید. نشان دهید range(T) دارای بعد متناهی است و $dim(V) = dim(null(T)) + dim(range(T))$ برقرار است.

(ج) دو فضای برداری V و W را با بعد متناهی در نظر گرفته و U را زیرفضای V فرض کنید. ثابت کنید تبدیل خطی T از فضای برداری V به W وجود دارد که $null(T) = U$ است اگر و تنها اگر $dim(V) \leq dim(W) + dim(U)$.

(د) فضای برداری V با بعد متناهی و تبدیل خطی T از V به W را در نظر بگیرید.ثابت کنید زیرفضای U در V وجود دارد به طوری که اشتراک U و null(T) برابر $\{0\}$ و $range(T) = \{T(u) : u \in U\}$.

**پرسش ۷** (۲۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) $A, B$ ماتریس‌های دلخواه $n \times n$ می‌باشند. ثابت کنید اگر داشته باشیم $AB = BA$ آنگاه نامساوی زیر برقرار است:

$$Rank(A+B) + Rank(AB) \leq Rank(A) + Rank(B)$$

(ب) (۱۰ نمره) فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ باشد به طوری که $A^۲ = ۰$. ثابت کنید:

$$Rank(A + A^T) = ۲Rank(A)$$

(ج) $A, B, C \in M_n(R)$ ماتریس‌هایی ناصفر هستند طوری که $ABC = ۰$. ثابت کنید:

$$rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq ۲n$$

(د) $A$و$B$ دو ماتریس مربعی هستند که $AB = ۲A + ۳B.$ ثابت کنید $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

(ه) دو ماتریس $A_{m\times k}$ و $B_{k\times n}$ را در نظر بگیرید.نشان دهید : $rank(A) + rank(B) \leq rank(AB) + k$ .

**پرسش ۸** (۱۰ نمره) برداری $n$ـ تایی مانند $u$ از اعداد مختلط داریم طوری که $||u|| = ۱$. نشان دهید $rank(I - uu^*) = n - ۱$.

---

## سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۷ آذر ۱۴۰۲

---

**پرسش ۱** (۱۰۰ نمره)

یک جدول $n \times m$ داریم. در هر خانه از این جدول **۰** یا **۱** نوشته شده. در هر مرحله می‌توانیم یک سطر را با یک سطر دیگر یا یک ستون را با یک ستون دیگر XOR بگیریم.

بعد از XOR گرفتن سطر $a$ با سطر $b$ داریم:

$$a_{j_{new}} = a_{j_{old}} \oplus b_j \quad (۱ \leq j \leq m)$$

بعد از XOR گرفتن ستون $a$ با ستون $b$ داریم:

$$a_{i_{new}} = a_{i_{old}} \oplus b_i \quad (۱ \leq i \leq n)$$

و همچنین

$$۰ \oplus ۰ = ۰, \quad ۰ \oplus ۱ = ۱, \quad ۱ \oplus ۰ = ۱, \quad ۱ \oplus ۱ = ۰$$

با انجام دادن تعداد دلخواه از عملیات‌های بالا، حداکثر تعداد **۱** هایی که می‌توان در این جدول آورد را محاسبه کنید.

**ورودی:** در سطر اول، دو عدد صحیح و مثبت $n$ و $m$ که با یک فاصله از هم جدا شده اند و به‌ترتیب تعداد سطرها و ستون‌های جدول را نشان می‌دهد.

$$۱ \leq n, m \leq ۳۰۰$$

در $n$ سطر بعدی هر سناریو، در هر کدام یک رشته از $m$ کاراکتر **۰** یا **۱** می‌آید که وضعیت اولیه جدول را نشان می‌دهد.

**خروجی:** در خروجی باید حداکثر تعداد **۱** هایی که می‌توان با عملیات‌های بالا ساخت را چاپ کنید.

**ورودی نمونه ۱**

```
3 4
1010
1010
0000
```

**خروجی نمونه ۱**

```
12
```

**ورودی نمونه ۲**

```
2 2
01
10
```

**خروجی نمونه ۲**

```
3
```

**ورودی نمونه ۳**

```
1 5
10101
```

**خروجی نمونه ۳**

```
5
```

در مثال اول اگر ابتدا مقدار سطر ۳ را با سطر ۱ XOR بگیریم به جدولی می‌رسیم که ستون‌های آن یکی در میان تماما ۱ و تماما ۰ است. سپس میتوانیم ستون ۲ و ۴ را با ستون ۱ XOR بگیریم تا به جدولی تماما ۱ برسیم.

در مثال دوم اگر سطر ۲ را با سطر ۱ XOR بگیریم به جدولی می‌رسیم که تنها خانه ۰ آن گوشه بالا چپ است و ۳ تا ۱ خواهیم داشت. می‌توان نشان داد به جدول تمام ۱ هیچگاه نخواهیم رسید.

در مثال سوم اگر ستون‌های ۲ و ۴ را با ستون ۵ XOR بگیریم به جدولی تماما ۱ می‌رسیم.